

# DIAGRAMMES ET CATÉGORIES : UNE INTRODUCTION

FRANCK JEDRZEJEWSKI

ABSTRACT. Ce texte est une introduction à ma thèse “Diagrammes et catégories”, qui donne les clés de lecture, la perspective et les lignes de fuite poursuivies. Cette thèse prend comme points de départ deux objets essentiels des sciences physiques et mathématiques de la seconde moitié du XXe siècle : les diagrammes et les catégories. En physique les diagrammes ont été introduits par Richard Feynman en 1948, pour sortir la physique des particules de l’impasse dans laquelle elle s’était aventurée. Après la guerre, les calculs classiques d’intégrales ne pouvaient pas être menés à terme. C’est alors que Richard Feynman a introduit à la conférence de Pocono les fameux diagrammes qui portent son nom et qui lui valurent le prix Nobel qu’il partagea avec Tomonaga et Schwinger en 1965. Feynman rend le calcul possible et donne naissance à l’électrodynamique quantique. Ces mêmes diagrammes dotés d’une autre machinerie ouvriront la voie à la chromodynamique quantique ainsi qu’à leur utilisation en physique statistique. Ces techniques inaugurent ce que j’ai appelé le tournant diagrammatique de la physique et je donne des exemples tirés des oeuvres de Penrose, Elbaz, Stedman et Cvitanovic. Du côté des mathématiques, Alexandre Grothendieck introduit de nombreux concepts nouveaux dont la notion de topos qui est un cas particulier de la notion de catégorie. Cette notion de catégorie a été introduite par Samuel Eilenberg et Saunders MacLane en 1942. Elle a trouvé des applications en logique grâce aux travaux de Lawvere et Tierney, et de nombreux développements à travers les travaux de Charles Ehresmann et de ses élèves. Les catégories mathématiques introduisent aussi une notion de diagramme. C’est l’ensemble de ces notions et leur polysémie que nous voudrions discuter.

Pour structurer cette discussion, il fallait une méthode. Cette méthode est issue de promenades, d’errances, de nomadisme à travers les sciences physico-mathématiques de cette seconde moitié du XXe siècle, qui m’ont conduit à retenir quatre concepts trans-catégoriels qui forment ce que j’ai appelé le *quadrilatère épistémique*. Ce quadrilatère se compose de la virtualité, la fonctorialité, l’universalité et la dualité. Ces concepts sont imbriqués les uns dans les autres et marquent deux grandes discontinuités de l’épistémè des sciences physico-mathématiques que sont la pensée diagrammatique d’une part et l’approche catégorielle d’autre part. La rupture vient de deux faits : D’une part, diagrammes et catégories privilégient le topologique au logique et d’autre part, le partage et les relations entre syntaxe, sémantique et logique ne sont plus essentiels. Ce qui a pour conséquences de s’interroger sur le sens de l’être du diagramme ou d’une catégorie, et de redistribuer les modalités de l’être selon un autre point de vue. A travers le quadrilatère épistémique, diagramme et catégorie donnent à penser un renouveau ontologique. La vérité elle-même n’a plus le sens d’une valuation vrai-faux qui serait le résultat d’inférences logiques, mais d’une vérité foudre, d’une vérité événement.

En philosophie, les catégories ont aussi une longue histoire. Chez Aristote, si on écarte la catégorie de la substance qui est centrale, les catégories sont disjointes. Un élément d'une catégorie est exclusivement une qualité, une quantité, un lieu, un temps, une action, une passion ou une autre catégorie. Comme la finalité des catégories est de dire les modalités de l'Être, le raisonnement conduit à une table à vocation taxinomique. Chez Kant, la table des catégories est homologue à la table des jugements, et ces deux tables déterminent la table des principes. En mathématiques, les catégories n'ont pas de finalité de jugement, ni de vocation classificatoire. Il n'y a pas de listes de catégories, mais seulement une définition qui dit ce que sont des catégories. Ce qui a pour conséquence, nous essayerons de la montrer, que les catégories mathématiques induisent une ontologie qui n'est pas incompatible avec l'univocité de l'Être. Ce qui ne veut pas dire qu'il y a un seul et même Être, mais que les étants multiples et différents ne sont pas incompatibles avec une approche catégorielle, dans la mesure où elle ne prescrit pas de les classer selon des analogies équivoques ou de les contraindre à une logique classique qui leur serait étrangère. Il ne s'agit pas de dire que l'Être doit se plier à une catégorie, mais de montrer que les prescriptions de la théorie mathématique des catégories pour l'ontologie ne sont pas en contradiction avec l'immanence et l'univocité de l'Être. Nous ne souhaitons pas un retour de l'*onto-(théo)-logie*, mais plutôt croiser ontologie et topologie en une *onto-(po)-logie*, une ontologie des catégories que j'appelle aussi ontologie toposique. Observons un à un les concepts du quadrilatère épistémique. Tout d'abord, le virtuel.

## 1. LE VIRTUEL

**Le virtuel.** L'enjeu des virtualités c'est de *donner à naître*. Leibniz veut faire vivre les points, les voir comme des « possibilités », ce que nous appelons aujourd'hui des virtualités. Il place le virtuel entre l'acte et la puissance d'Aristote. Gilles Châtelet développe cette idée que la virtualité des points singuliers démange, qu'il faut gratter ces singularités pour exprimer la puissance des choses. Actuel et virtuel compose la réalité du monde. Quand le physicien pose le *principe des travaux virtuels*, il ne s'agit pas de mondes chimériques, mais bien du monde dans lequel nous vivons. Comprendre ce qu'est une particule et une anti-particule, c'est se placer au point où s'enchevêtrent dans la *création* de ces deux objets, le devenir de chaque particule et dans l'*annihilation* les territoires que chacune délimite. Si un couple électron-positon prend naissance, c'est comme actualisation de la virtualité du vide quantique. Pour comprendre le virtuel, il faut éviter deux contresens. Le premier est d'assimiler le virtuel au possible. Le second est de voir dans le virtuel une composante irréelle. Car le virtuel est d'abord un tout réel qui ne nous est pas explicitement donné. La physique quantique est l'illustration la plus simple d'un virtuel incorporel qui ne se résout que dans une suite de diagrammes. L'intégrale de chemins (que l'on appelle aussi intégrale de Feynman) est une somme sur des composantes virtuelles. C'est cette somme qui détermine le réel tel que nous le percevons. Une somme sur des composantes virtuelles pour un résultat actuel, c'est toute l'ambiguïté de la physique de l'après-guerre. Car le virtuel pousse sous l'actuel. Ce qui nous est donné, c'est simplement des passages, des singularités par lesquelles le calcul s'engouffre. A la frontière de l'actuel et du virtuel, le diagramme fonctionne comme un réceptacle de virtualités en attente d'actualisation.

**Le diagramme et le geste.** Comprendre, c'est assimiler un geste, être capable de le reproduire et de le prolonger (Jean Cavailles). Ce geste qui saisit un domaine, qui associe l'œil et la main, qui cherche une connaissance véritable ne peut disjoindre agir, comprendre et sentir. Car là est la clé de toute compréhension créatrice. Non pas une compréhension gelée, figée, indexée sur le signe, où tout est explicite, comme dans une démonstration mécanique qui enchaîne les inférences logiques, mais une intelligibilité créatrice où l'on ne peut donner tout ce qu'il y a à comprendre, où le virtuel joue un rôle crucial. C'est ce mode d'intelligibilité qui permet de poursuivre le geste et qui est le véritable enjeu du diagramme qui donne à voir plus que l'œil ne perçoit. « Un diagramme peut immobiliser un geste, le mettre au repos, bien avant qu'il ne se blottisse dans un signe, et c'est pourquoi les géomètres et les cosmologistes contemporains aiment les diagrammes et leur pouvoir d'évocation péremptoire. Ils saisissent les gestes au vol ; pour ceux qui savent être attentifs ce sont les sourires de l'être. » (Gilles Châtelet).

## 2. LE FONCTORIEL

**Catégories et topoi.** Une catégorie mathématique est une collection d'objets et de flèches (on dit aussi de "morphismes") qui vérifie certaines règles. L'objet est pris ici dans son sens husserlien comme un terme universel qui désigne toute chose, chose étant pris dans son sens le plus général et pas seulement de corps matériel. La définition mathématique ne dit pas qui sont les catégories, mais ce qu'est une catégorie. La flèche regroupe plusieurs sens. Elle peut être à la fois : la relation d'un objet à un autre, la propriété d'un objet ou l'action d'un objet sur un autre. La notion de catégorie correspond à un univers possible formé d'entités générales appelées objets. La notion de *topos* est un cas particulier de la notion de catégorie. Le foncteur est plus qu'une fonction. C'est ce qui permet le passage d'une catégorie à une autre. Il associe les objets de la catégorie A aux objets de la catégorie B, les morphismes de la catégorie A aux morphismes de la catégorie B et conserve les règles d'agencement des catégories, identité et composition des morphismes. En ce sens, le foncteur, c'est d'abord ce qui permet de passer d'un territoire à un autre. On le trouve entre les diagrammes et il est à l'origine d'une définition mathématique de ce que sont les objets et les propriétés universelles. C'est un redoutable instrument d'investigation, qui est au centre de questions lourdes de conséquences : la représentabilité des foncteurs et leur adjonction. Je propose maintenant une relecture de deux résultats essentiels en théorie des catégories, qui ont été très peu commentés par les philosophes qui s'intéressent à la théorie des catégories : le lemme de Yoneda et le théorème de Diaconescu.

**Le lemme de Yoneda.** Le *lemme de Yoneda* établit que les morphismes de l'objet  $X$  vers l'objet  $Y$  sont isomorphes aux transformations naturelles du *hom-foncteur*  $h_X$  vers  $h_Y$ . A chaque objet  $X$ , l'application  $h_X$  est l'application de la catégorie  $\mathcal{C}$  dans la catégorie des ensembles **Ens** qui à chaque objet  $A$  associe un morphisme de  $Hom(X, A)$ . Le foncteur *hom* représente en quelque sorte les points de vue de l'objet  $X$  dans la catégorie  $\mathcal{C}$ . Le lemme de Yoneda établit donc dans la relecture que j'en donne que deux objets sont équivalents si et seulement si ce sont les mêmes objets vus de tous les points de vue. L'objet est donc équivalent à la collection de ses points de vue. L'objet et le sujet sont donc les deux faces indissociables d'une même entité. Yoneda impose l'union du sujet et de l'objet. Il établit une équivalence entre l'*objet objectivé* et l'*objet subjectivé*. En somme, il donne une démonstration

à l'idée que l'objet et le sujet ne peuvent pas se prendre séparément. L'objet parce qu'il participe au sujet fonde la possibilité d'objectiver le monde, mais aussi et de manière équivalente de le subjectiver. Il ne s'agit pas de relativiser le contenu à la forme, de réduire l'objet aux relations qu'il entretient avec le système, mais bien de distinguer l'objet mathématique par les morphismes qui le pointent. Morphismes qui peuvent d'ailleurs s'appliquer à l'objet en un mouvement autoréférent pour définir l'objet et ses sous-objets, mais aussi l'ensemble de ses points de vue. En somme, le lemme de Yoneda caractérise l'être de l'objet par les actions que sont les morphismes qui l'entourent et le définissent.

**Le théorème de Diaconescu.** Deuxième théorème d'importance pour la philosophie : le théorème de Diaconescu (1975). Il établit que si l'axiome du choix est vérifié dans un topos alors ce topos est booléen, autrement dit sa logique interne est classique. Comme l'axiome du choix a plusieurs formulations équivalentes, il s'ensuit qu'il existe plusieurs critères impliquant le principe du tiers exclu. L'axiome du choix est équivalent à avoir une fonction de choix, ou à mettre un ordre sur le topos, ou bien à choisir un plus petit élément, ou encore à avoir une structure dénombrable dans toute infinité, c'est-à-dire avoir un ensemble isomorphe à l'ensemble des entiers naturels. Il équivaut encore à ce que tout ensemble soit constructible. Mais ce qu'il a de plus remarquables est qu'il équivaut au postulat de Dedekind (tout ensemble infini a un sous-ensemble dénombrable). Si le topos admet un ensemble infini (ce qui n'est pas le cas pour tous les topoi), la structure de ses sous-ensembles est déterminante pour la logique interne de ce topos. Il suffit que tout ensemble infini ait une partie infinie comptable, qu'il existe des éléments isomorphes à des nombres entiers naturels pour que la logique interne soit classique. C'est un problème lié à la texture du topos et à l'atomicité de ses parties infinies. Si la granularité du monde permet de distinguer des unités de sorte qu'on puisse y dénombrer des éléments, alors le tiers exclu sera vérifié. Si l'axiome du choix est vrai alors toutes les parties infinies ont des structures d'un-multiple, dans le cas contraire il existe des multiplicités qui n'ont pas de sous-structures comptables. Le théorème de Diaconescu est donc un remarquable résultat d'ontologie, qui montre que la texture des topoi détermine la logique immanente des mondes.

### 3. L'UNIVERSEL

**L'universel.** La théorie des catégories définit ce qu'est un problème ou un objet universel. L'universalité ne se définit plus par opposition au particulier, mais par l'unicité de cet objet universel construit fonctoriellement. Il s'ensuit que l'universalité n'est pas une question de logique où les universaux sont toujours des prédicaments, mais une question de catégories et de topologie. Le chiffre cinq est universel non pas parce qu'il généralise des particuliers mais parce qu'il est l'unique successeur de quatre. L'universel est cette multiplicité que l'objet a d'unique, l'expression de ce qui est versé à l'Un. L'existence d'un produit ou l'existence de limites sont des problèmes universels. La solution d'un problème universel n'existe pas nécessairement. Si  $\mathcal{A}$  est la catégorie des groupes finis et  $\mathcal{B}$  la catégorie des ensembles finis, le foncteur d'oubli  $F$  est le foncteur qui associe à chaque groupe  $G$  l'ensemble  $G$  formé des éléments de  $G$  (on conserve le même ensemble et on oublie la structure de groupe). Si  $B$  est un ensemble non vide, il n'y a pas d'objet  $A$  dans la catégorie  $\mathcal{A}$  attaché à  $B$ . Le problème universel n'a pas de solution, puisqu'il n'existe pas nécessairement de groupe associé à un ensemble donné. Ce qui ne veut pas dire

que la notion de groupe n'est pas universelle, mais que la notion de groupe associé à un ensemble n'est pas universelle.

#### 4. LA DUALITÉ

**La dualité.** Une catégorie est définie par des objets et des flèches, et sa catégorie duale est définie en renversant le sens des flèches. C'est d'une simplicité diagrammatique incroyable et pourtant très profond. Il ne faut pas confondre la dualité et la binarité, les couples que forment certains objets. Il ne s'agit pas de réconcilier des collections de termes opposés, ni de réintroduire une ontologie dualiste fondée sur les particuliers et les universels, mais de comprendre les conséquences philosophiques de la notion de dualité telle que nous la trouvons dans les sciences. Les couples en dualité comme matière et antimatière, ondes et corpuscules, champs électrique et magnétique, analyse de Fourier en amplitude et en fréquences sont des termes qui ne s'opposent pas mais fonctionnent en parallèle en se mimant les uns les autres. Si un diagramme fonctionne dans un espace donné, le diagramme dual fonctionnera de façon inversée dans un espace coposé à l'espace d'origine. La dualité catégorielle est la dualité du Même et de l'Autre : c'est là son origine démiurgique. (et aussi un chantier pour la philosophie : faire la généalogie de la dualité). J'examine dans la thèse plusieurs exemples de dualité, comme la dualité des théorèmes de Brianchon et de Pascal, ou la dualité de Fourier et sa généralisation. En physique, la dualité des supercordes permet progressivement de réduire le nombre de théories possibles, en considérant que deux théories duales sont équivalentes. On espère ainsi trouver une théorie unique (universelle) en éliminant les théories duales. L'existence de la dualité, et plus généralement des concepts du quadrilatère épistémique a des conséquences ontologiques importantes, que je voudrais maintenant reprendre sous la forme d'une conclusion.

#### 5. CONCLUSION

L'examen des diagrammes et catégories à travers le prisme du quadrilatère épistémique conduit à poser cinq thèses ontologiques.

(1) **Il n'existe pas de multiplicité pure.** Il existe bien des multiplicités, mais on ne peut pas les considérer comme des multiplicités *pures*. Car ce sont toujours des objets multiples en dualité interne. Le dual unifie dans un même être des composantes distinctes. Cet être ne peut qu'exister que parce que ces composantes existent (c'est le cas des champs électriques et magnétiques duals l'un de l'autre). L'existence d'une structure duale empêche de penser l'étant et le non-étant comme un partage dyadique complet qui partitionnerait exactement l'Être en deux parties disjointes comme un universel et un particulier, un ensemble de vérités et une scène de simulacres.

(2) **Le virtuel n'est pas l'Être de l'étant,** car l'Être de l'étant n'est pas une réalité inaccomplie, mais bien au contraire une réalité en acte accomplie, actuelle qui assure l'existence des étants. Exclure l'Être de l'étant de l'actuel, c'est restreindre l'actuel à l'étant. Par conséquent, il faut rejeter l'idée que l'actuel se restreint à l'étant et que l'Être de l'étant (c'est-à-dire la *quiddité*) n'est pas actuel. Il s'ensuit que *l'actuel est l'étant en tant qu'Être*. Donc que le virtuel n'est pas l'Être de l'étant.

(3) **L'Un est le dual de l'Être.** Comment le virtuel s'il n'appartient pas à l'Être pourrait-il exister ? Pour sortir de cette contradiction, il n'y a que deux solutions. Soit on considère que le virtuel n'existe pas, mais nous avons vu que cela est en désaccord avec la science, soit le virtuel existe et dans ce cas il faut invoquer l'Un, non pas pour l'assimiler au virtuel ou convoquer d'anciens préjugés religieux, mais pour faire l'hypothèse que *l'Un est le dual de l'Être*. Tout objet-un est une multiplicité et toute multiplicité est un objet-un. Cette *hétérothésis* de l'Un et du Multiple fonde l'idée que l'Un est le dual de l'Être. Deux espaces différents, indissociables l'un de l'autre fonctionnant en parallèle. Ce qui suppose qu'il existe des *unants* qui sont à l'Un ce que les étants sont à l'Être. Et par dualité si l'actuel est l'étant en tant qu'Être, il s'ensuit que *le virtuel est l'unant en tant qu'Un*. L'unant est donc le dual de l'étant autrement dit un étant qui privilégie son caractère unitaire. Si un objet a des singularités, l'unant unifie ces singularités infinies afin qu'elles nous soient accessibles à travers l'étant. C'est dans ce sens que nous comprenons cette phrase de Deleuze, je cite : « le virtuel est déploiement de l'Un dans sa différenciation immanente. »

(4) **La vérité est une vérité foudre, coextensive à la dualité ontologique.** La vérité ne peut plus être pensée et utilisée comme une fonction de valuation sur un espace de propositions auquel est associée une valeur numérique ou booléenne, une valuation normative où son rôle est de vérifier une possibilité. La vérité est d'abord une intuition foudroyante qui témoigne de la vérité d'un lieu. Non seulement il y a des zones d'indécidabilité, des régions où la vérité est quantifiée, mais aussi des espaces où le mode de propagation des vérités n'est pas l'inférence de propositions vraies, mais des pans entiers résonants entre modèles adéquats. Dans son cheminement généalogique, la vérité est devenue selon l'expression de Heidegger, le lieu de la justesse ou de la *rectitude* du logos. Puis au contact des modèles physico-mathématiques, elle s'est encore transformée pour devenir le lieu de l'*adéquation*. Si bien que l'atomisation et la localisation de la vérité à des propositions logiques ont disparu au profit d'une vérité foudre, d'une vérité événementielle, plus proche de sa dimension originelle. C'est pourquoi il ne peut exister qu'une *vérité-foudre*, une *vérité-événement*.

(5) **Le quadrilatère épistémique est le garant de l'univocité de l'être.** Que l'Être se dise en un seul et même sens, que l'Être soit univoque n'est pas en contradiction avec la multiplicité des étants. C'est ce qu'enseignent les composantes du quadrilatère que sont l'universalité qui se porte entre catégories à travers une unicité fonctorielle et la dualité qui assume l'ambivalence des étants et des unants. Si l'univocité n'existait pas, il ne pourrait pas exister d'universalité. Les scientifiques ne parleraient pas le même langage, le sens n'aurait plus ce caractère univoque qui garantit la communication. L'Un lui-même n'est pas une unité, il est toujours double en tant que dual. Je résume cela en prolongeant la formule de Deleuze : *les étants sont formellement divers, hénologiquement deux et ontologiquement un*.

**Conclusion générale.** L'Être n'est pas un multiple pur, inconsistant, soustrait à l'Un (thèse de Badiou), ni une modalité de l'Un (thèse de Deleuze), l'Être est une multiplicité duale et l'Un est le dual de cette multiplicité.